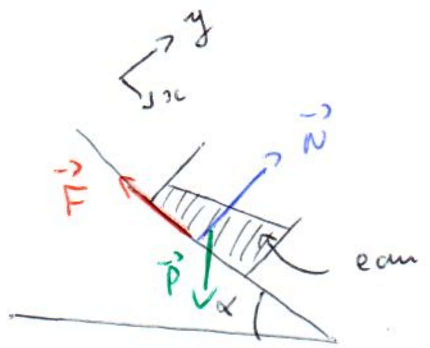
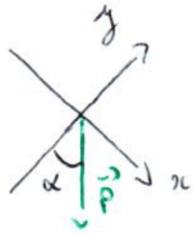
Exo 2 : on considère un réservoir contenant de l'eau (2,1)

qui glisse sur un plan incliné sous l'action de son poids. Soit $\alpha$ l'angle entre le plan incliné et l'horizontale. On fera l'hypothèse que l'eau du réservoir a atteint un régime permanent, ce qui se traduit ici par le fait que l'eau est au repos par rapport au récipient. Dans le cadre de cette




hypothèse, assimilons tout d'abord le système total {récipient + eau} à un point matériel de masse $m$, et de coordonnées $x$ et $y$ (on considère qu'il n'y a aucun mouvement dans la direction $y$). Ce système est alors soumis à 3 forces :

i) le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\sin\alpha\,\vec{u}_x - mg\cos\alpha\,\vec{u}_y$




ii) la réaction normale du support, perpendiculaire au plan incliné, ie $\vec{N} = N\vec{u}_y$

iii) la force de frottement avec le plan incliné, et de coefficient de frottement $f$, étant dirigée à l'encontre du mouvement (et s'opposant donc à la composante selon $x$ du poids ici), et étant proportionnelle à la réaction normale, ie $\vec{F} = -fN\vec{u}_x$

On écrit donc le PFD pour ce système, et on obtient (puisqu'il n'y a aucun mouvement dans la direction $y$)

$$m\ddot{x}\,\vec{u}_x = mg\sin\alpha\,\vec{u}_x - mg\cos\alpha\,\vec{u}_y + N\vec{u}_y - fN\vec{u}_x$$

d'où, en projetant selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$,

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha - fN & (1a) \\ 0 = -mg\cos\alpha + N & (1b) \end{cases}$$

De (1b) on tire directement l'expression de la réaction normale, ie

$$N = mg\cos\alpha \qquad (2)$$

On substitue donc l'expression (2) de $N$ dans (1a) pour obtenir

$$\cancel{m}\ddot{x} = \cancel{m}g\sin\alpha - \cancel{m}gf\cos\alpha$$

et donc

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \qquad (3)$$

qui caractérise donc l'accélération du système total {récipient + eau}. Or, on rappelle que l'on se place dans l'hypothèse où l'eau a atteint un régime permanent, c'est à dire qu'elle se trouve être au repos par rapport au récipient. Ainsi, l'accélération de toute particule de fluide se trouve être la même que l'accélération du système total {récipient + eau}.

L'accélération $\vec{a}_{fluide}$ de l'eau est donc donnée par, avec (3) et en se rappelant que $\ddot{y} = 0$,

$$\vec{a}_{fluide} = \ddot{x}\,\vec{u}_x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,\vec{u}_x \qquad (4)$$

De plus, elle satisfait l'équation

$$\begin{aligned} \mu\,\vec{a}_{fluide} &= -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \mu\vec{g} \\ &= -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \mu g\sin\alpha\,\vec{u}_x - \mu g\cos\alpha\,\vec{u}_y \end{aligned}$$

d'où, avec (4) et $\vec{\text{grad}}\, P = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{n}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{n}_y$ (où $P$ est la pression ici) 

$$\mu g\,(\cancel{\sin\alpha} - f\cos\alpha)\,\vec{n}_x = -\frac{\partial P}{\partial x}\vec{n}_x - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{n}_y$$

$$+\mu g\,\cancel{\sin\alpha}\,\vec{n}_x - \mu g\cos\alpha\,\vec{n}_y$$

et donc, en projetant selon $\vec{n}_x$ et $\vec{n}_y$,

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \mu g f\cos\alpha & (5a) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\mu g\cos\alpha & (5b) \end{array}\right.$$

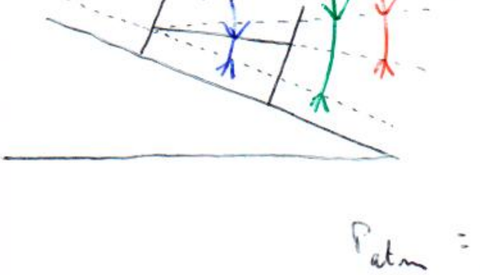
la pression $P$ peut donc s'écrire sous la forme

$$P = \mu g f\cos(\alpha)\,x - \mu g\cos(\alpha)\,y + \text{cte}$$

soit, en dénotant la constante $P_0$,

$$P = \mu g\cos(\alpha)\,(fx - y) + P_0 \qquad (6)$$

Soit maintenant $\beta$ l'angle entre la surface de l'eau et le plan incliné. La surface de l'eau est une surface isobare, ie la pression y est constante (et égale à la pression atmosphérique). On a donc d'après **(6)**

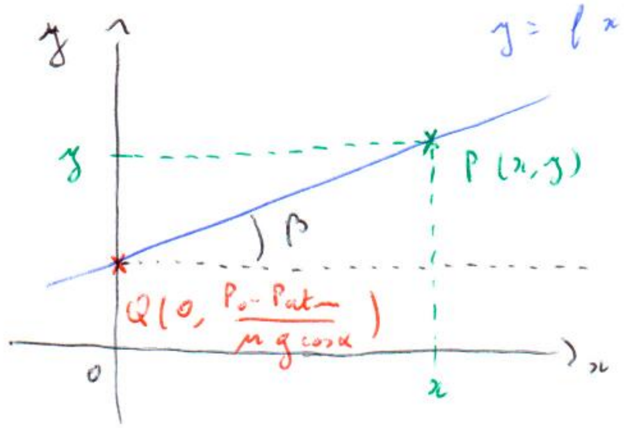



$$P_{atm} = \mu g\cos(\alpha)\,(fx - y) + P_0 \quad\text{, à la surface}$$

ce qui nous donne donc la relation suivante entre les variables $y$ et $x$ à la surface de l'eau :

$$y = fx + \frac{P_0 - P_{atm}}{\mu g \cos\alpha} \quad , \quad \text{à la surface} \tag{7}$$

Ainsi, l'angle $\beta$ se détermine simplement en calculant l'angle entre la courbe représentative de la fonction $y(x)$ donnée par (7) et l'axe des $x$.




L'angle $\beta$ satisfait donc

$$\tan\beta = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$$

avec

$$x_P = x \quad \text{et} \quad x_Q = 0 \quad ; \quad y_P = y = fx + \frac{P_0 - P_{atm}}{\mu g \cos\alpha} \quad \text{et} \quad y_Q = \frac{P_0 - P_{atm}}{\mu g \cos\alpha}$$

d'où

$$\tan\beta = \frac{1}{x}\left( fx + \cancel{\frac{P_0 - P_{atm}}{\mu g \cos\alpha}} - \cancel{\frac{P_0 - P_{atm}}{\mu g \cos\alpha}} \right)$$

et donc

$$\boxed{\tan\beta = f} \tag{8}$$

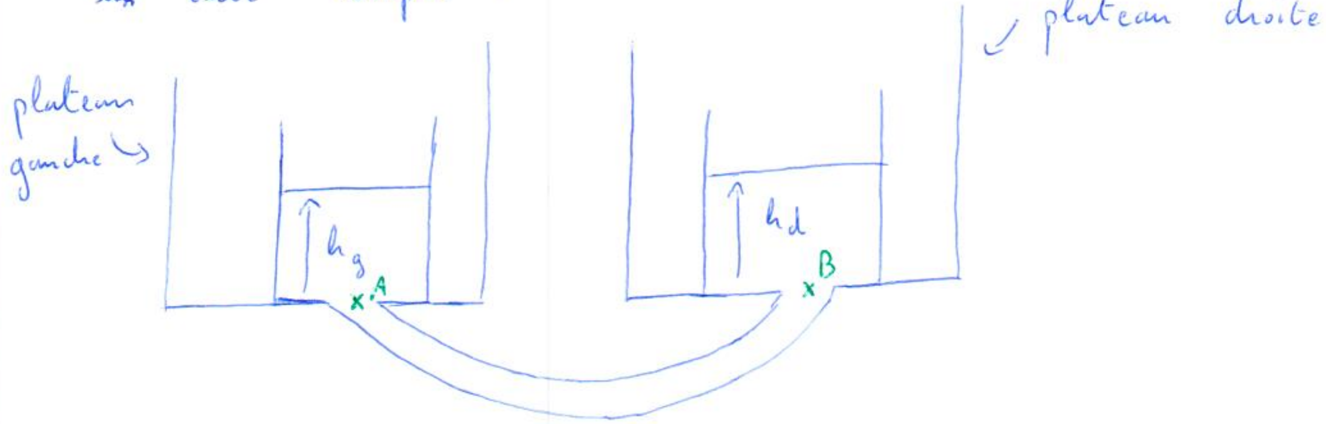
L'angle $\theta$ entre la surface de l'eau et l'horizontale est donc donné par

$$\boxed{\theta = \alpha - \beta = \alpha - \text{Arctan}\, f} \tag{9}$$

En l'absence de frottements, ie pour $f = 0$, on a donc $\theta = \alpha$. Dans ce cas, la surface de l'eau est donc parallèle au plan incliné.

Exo 3 : on considère deux vases identiques, placés sur les deux plateaux d'une balance, et reliés entre eux par un tube souple.

(3,1)




On suppose que le fluide est au repos, ainsi toute particule de fluide a une vitesse nulle. Ecrivons tout d'abord Bernoulli aux points A (situé au fond du vase gauche) et B (au fond du vase droite), on a, puisque $v_A = v_B = 0$,

$$g h_g + \frac{P_A}{\mu} = g h_d + \frac{P_B}{\mu} \tag{1}$$

Or les pressions $P_A$ et $P_B$ sont données par

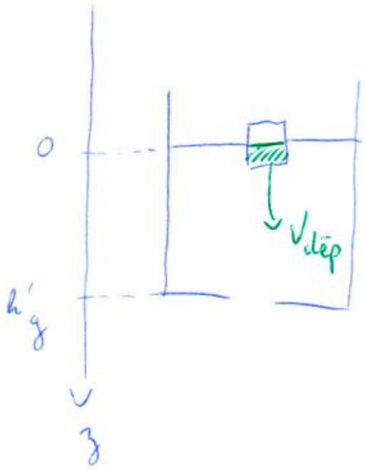
$$P_A = P_{atm} + \mu g h_g \qquad \text{et} \qquad P_B = P_{atm} + \mu g h_d$$

et on obtient donc de (1) l'égalité

$$h_d = h_g = h \tag{2}$$

Ainsi, les hauteurs d'eau à gauche et à droite sont les mêmes. Les vases étant identiques, les volumes d'eau présents dans les vases à gauche et à droite sont les mêmes et la balance est donc bien à l'équilibre.

On place ensuite un objet de masse m dans le vase de gauche, et on suppose que celui-ci flotte.




Deux forces s'appliquent sur la masse $m$ :

i) son poids $\vec{P} = mg\,\vec{n}_3$

ii) la poussée d'Archimède

$$\vec{F}_A = -\mu\, V_{dép}\, g\, \vec{n}_3$$

avec $\mu$ la masse volumique de l'eau et $V_{dép}$ le volume de fluide déplacé par l'objet.

Puisque l'objet est supposé être dans une situation d'équilibre (ie immobile $\Rightarrow \ddot{z} = 0$), on a (PFD)

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}_A = mg\,\vec{n}_3 - \mu\, V_{dép}\, g\, \vec{n}_3$$

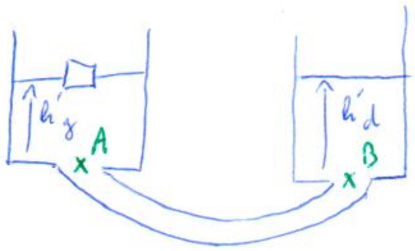
ce qui donne

$$V_{dép} = \frac{m}{\mu} \qquad (3)$$

De plus, le volume total d'eau présent dans le système {vase gauche + tube + vase droite} n'a pas changé avec l'ajout de l'objet, qui n'a pas non plus changé le volume d'eau $V_{tube}$ dans le tube (qui doit toujours être rempli). Le volume d'eau total $V_{tot}$ est donné par

$$V_{tot} = \underbrace{V_g}_{\text{volume d'eau à gauche}} + V_{tube} + \underbrace{V_d}_{\text{volume d'eau à droite}} \qquad (4)$$

Supposons pour simplifier la discussion que les vases sont cylindriques de section d'aire $S$. Avant d'introduire l'objet de masse $m$, on sait d'après (2) que les hauteurs d'eau à gauche et à droite sont les mêmes et égales à $h$. Supposons maintenant qu'après avoir mis l'objet, l'eau atteint une hauteur $h'_g$ dans le vase de gauche. Soit donc $h'_d$ la hauteur de l'eau dans le vase de droite après avoir placé l'objet. On écrit à nouveau Bernoulli aux deux points $A$ (au fond du vase gauche) et $B$ (au fond du vase droite) et on a, le fluide étant ici encore au repos ($\Rightarrow v_A = v_B = 0$) (3₂)




$$g h'_g + \frac{P_A}{\mu} = g h'_d + \frac{P_B}{\mu} \tag{5}$$

Or on a pour $P_A$ et $P_B$

$$P_A = P_{atm} + \mu g h'_g \qquad \text{et} \qquad P_B = P_{atm} + \mu g h'_d$$

et on obtient donc de (5)

$$h'_g = h'_d = h' \tag{6}$$

Ainsi, après avoir mis l'objet, les hauteurs d'eau à gauche et à droite restent égales.
Le volume d'eau à gauche est donc donné par

$$V_g = S h' - V_{dép} = S h' - \frac{m}{\mu} \tag{7}$$

tandis que le volume d'eau à droite est

$$V_d = S h' \tag{8}$$

De (7) et (8) on voit donc que la masse totale dans le vase de gauche est donnée par

$$m_g = m + m_{eau,g} = m + \mu V_g$$

ie

$$m_g = \mu S h' \tag{9}$$

tandis que la masse totale dans le vase de droite est donnée par

$$m_d = m_{eau, d} = \mu V_d$$

ie

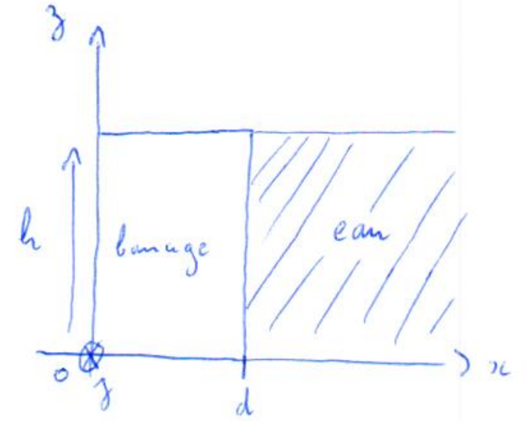
$$m_d = \mu S h' \tag{10}$$

En comparant (9) et (10) on voit donc directement que les masses à gauche et à droite sont les mêmes,

$$\boxed{m_g = m_d} \tag{11}$$

Ainsi, la balance reste à l'équilibre après avoir ajouté l'objet.

Exo 4 : On considère un barrage, assimilé à un parallélépipède droit homogène de masse volumique $\rho$, hauteur $h$ et épaisseur $d$. On introduira également $\ell$ la longueur du barrage dans la direction $y$. (4,1)




La masse $m$ du barrage est donc

$$m = \rho \ell h d \qquad (1)$$

On suppose que la force exercée par le sol sur le barrage par unité de surface a une composante verticale de la forme

$$F(x) = A + Bx \qquad (2)$$

Bien entendu, le sol exerce aussi une force tangentielle (dans le plan $(xy)$) sur le barrage, mais elle n'apparaîtra pas dans les calculs. On notera enfin $\mu$ la masse volumique de l'eau.

1) L'équilibre du barrage se traduit par le fait que la somme des forces est nulle, de même que la somme des moments.

→ Forces : deux forces s'exercent sur le barrage dans la direction $z$ :

i) son poids $\vec{P} = -mg\,\vec{u}_z$

ii) la force de réaction du sol $\vec{F}_{sol} = \int dx\,dy\,F(x)\,\vec{u}_z$,

soit avec (2)

$$\vec{F}_{sol} = \ell \int_0^d dx\,(A + Bx)\,\vec{u}_z = \ell\left(Ad + \frac{B}{2}d^2\right)\vec{u}_z$$

La condition d'équilibre $\vec{P} + \vec{F}_{sol} = \vec{0}$ donne donc, avec (1),

$$\rho h g = A + \frac{B}{2} d \tag{3}$$

→ Moments : on calcule par exemple les moments au point A, supposé être au milieu du barrage dans la direction $y$ (⇒ $y \in [-l/2, l/2]$), et on a le moment total

$$\vec{\mathcal{M}}_{tot/A} = \vec{\mathcal{M}}_{sol/A} + \vec{\mathcal{M}}_{pression/A} + \vec{\mathcal{M}}_{\vec{P}/A} \tag{4}$$

le poids s'applique au centre de masse G du barrage, avec $\vec{OG} = \frac{d}{2}\vec{u}_x + \frac{h}{2}\vec{u}_z$, d'où

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{P}/A} = \vec{AG} \times \vec{P} = -\frac{1}{2} m d g \vec{u}_y \tag{5}$$

Soit ensuite un point Q quelconque de la surface du barrage en contact avec le sol, ie $\vec{OQ} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$.

On a donc

$$\vec{\mathcal{M}}_{sol/A} = \int dx\, dy\, \vec{AQ} \times E(x)\vec{u}_z = \int_0^d dx \int_{-l/2}^{l/2} dy \left[(x-d)\vec{u}_x + y\vec{u}_y\right] \times E(x)\vec{u}_z$$

soit avec (2)

$$\vec{\mathcal{M}}_{sol/A} = l\left(\frac{1}{2} A d^2 + \frac{1}{6} B d^3\right)\vec{u}_y \tag{6}$$

Soit maintenant Q un point quelconque de la surface verticale du barrage en contact avec l'eau, ie $\vec{OQ} = d\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$. La force de pression due à l'eau en Q étant

$$\vec{p}(Q) = -\mu g (h - z)\vec{u}_x$$

on a

$(4_2)$

$$\vec{\Gamma}_{\text{pression}/A} = \int dy\, dz\ \vec{AQ} \times \vec{f}(Q)$$

$$= \int_{-l/2}^{l/2} dy \int_0^h dz\ (y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z) \times \mu g (z-h)\,\vec{u}_x$$

soit

$$\vec{\Gamma}_{\text{pression}/A} = -\frac{1}{6}\mu g l h^3\,\vec{u}_y \qquad (7)$$

La condition d'équilibre $\vec{\Gamma}_{tot/A} = \vec{0}$ donne donc, avec (1) et (5)-(7),

$$-\frac{1}{2}\rho h d^2 g + \frac{1}{2} A d^2 + \frac{1}{6} B d^3 - \frac{1}{6}\mu g h^3 = 0 \qquad (8)$$

Les constantes A et B satisfont donc les deux équations linéaires (3) et (8), que l'on peut résoudre pour trouver

$$(9)\quad \begin{cases} A = hg\left[\rho + \mu\left(\frac{h}{d}\right)^2\right] \\ B = -2\mu g\left(\frac{h}{d}\right)^3 \end{cases}$$

2) Puisque $E(x) = A + Bx$ et qu'on vient de voir que $B < 0$, E est donc minimale pour la valeur la plus grande de $x$, ie $x = d$. Il est souhaitable que E soit partout positif afin d'assurer que le barrage soit partout en contact avec le sol.

3) On a vu au point 2) que la valeur minimale de E correspond à

$$E_{min} = E(d)$$

soit avec (9) et $E(d) = A + Bd$

$$E_{min} = hg\left[\rho - \mu\left(\frac{h}{d}\right)^2\right] \tag{10}$$

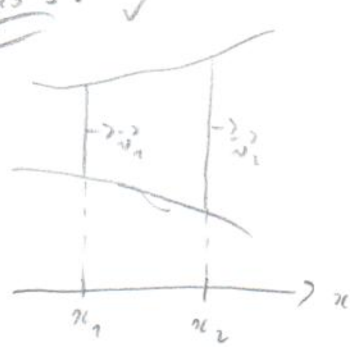
Puisque $E$ doit être partout positif, on doit en particulier avoir

$$E_{min} \geq 0 \tag{11}$$

En combinant (10) et (11) on voit donc que l'épaisseur $d$ du barrage doit satisfaire la condition

$$\boxed{d \geq h\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}} \tag{12}$$

Exo 5 : ✓




Prenons 1 certain volume $V$ de fluide. On supp q l'écoult est permanent et unidirectionnel, ds la direct° $x$. La masse de fluide présente ds le volume $V$ doit ê conservée au cours du tps, ie (5₁)

$$m(t+\Delta t) = m(t) \qquad (1)$$

Or, la masse $m(t+\Delta t)$ est $=$ à la masse $m(t)$ (masse présente ds le vol $V$ fixé à l'instant $t$) plus la masse $m_{in}$ de fluide qui est entrée ds le vol $V$ pdt l'int de tps $\Delta t$ moins la masse $m_{out}$ de fluide qui est sortie du vol $V$ pdt l'int de tps $\Delta t$ (nous n'avons pas de terme source, ie de créat° de masse au sein du vol $V$ : ceci pourrait se prod si l'on considérait la masse d'1 cert composante chimiq pouvant ê créée au sein de $V$ au moyen de réact° chimiq : ceci n'est pas considéré ici : fluide permanent, pas de réact° chimiq). A l'entrée du volume $V$, ie en $x = x_1$, la masse volumiq du fluide est $\mu(x_1)$, l'aire de la sect° est $S(x_1)$ et la vitesse du fluide est $\vec{v}(x_1) = v(x_1)\,\hat{x}$. A la sortie du vol $V$, en $x = x_2$, la masse vol, l'aire de la sect° et la vit st $\mu(x_2)$, $S(x_2)$ et $\vec{v}(x_2) = v(x_2)\,\hat{x}$. On a donc

$$\begin{cases} m_{in} = \mu(x_1)\,S(x_1)\,v(x_1)\,\Delta t \\ m_{out} = \mu(x_2)\,S(x_2)\,v(x_2)\,\Delta t \end{cases}$$

d'où

$$(2) \qquad m(t+\Delta t) = m(t) + \mu(x_1)\,S(x_1)\,v(x_1)\,\Delta t - \mu(x_2)\,S(x_2)\,v(x_2)\,\Delta t$$

En combinant (1) et (2) on obtient

$$\cancel{m(t)} + \mu(x_1)\,S(x_1)\,v(x_1)\,\Delta t - \mu(x_2)\,S(x_2)\,v(x_2)\,\Delta t = \cancel{m(t)}$$

d'où

$$\mu(x_1)\, S(x_1)\, v(x_1) = \mu(x_2)\, S(x_2)\, v(x_2) \qquad (3)$$

Le volume $V$ étant complètement arbitraire, la relat° (3) est donc valable $\forall x_1, x_2$. On voit donc directement que la qté

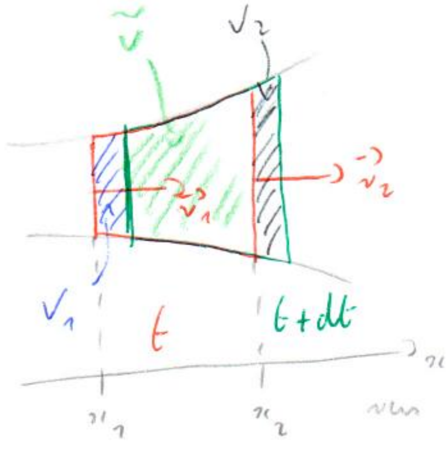
$$D = \mu(x)\, S(x)\, v(x) \qquad (4)$$

doit donc ê indépendante de $x$. On appelle dès lors cette qté $D$ le débit massif. Sa dimension est

$$[D] = M \cdot T^{-1}$$

$D$ quantifie de la masse traversant la sect° $S(x)$, $\forall x$, par unité de tps.

2) Considérons maintenant 1 certain volume $V$ de fluide à l'instant $t$. L'impulsion $\vec{P}(t)$ de ce volume à l'instant $t$ vaut donc




$$\vec{P}(t) = \int_V dV\, \mu\, \vec{v}$$

À un instant $t+dt$ ultérieur, l'ens du fluide formant ce syst s'est déplacé vers la droite, formant un vol disons $V'$. L'impulsion du syst à l'instant $t+dt$ vaut donc

$$\vec{P}(t+dt) = \int_{V'} dV\, \mu\, \vec{v}$$

Dénotons $\tilde{V}$ le volume commun à $V$ et $V'$, et $V_1$ le volume restant $\in V$ mais pas à $V'$, $V_2$ le volume restant $\in V'$ mais pas à $V$. Les impulsions $\vec{P}(t)$ et $\vec{P}(t+dt)$ peuvent ê écrites cô

$$(1) \quad \begin{cases} \vec{P}(t) = \int_{\tilde{V}} dV \mu \vec{v} + \int_{V_1} dV \mu \vec{v} \\ \vec{P}(t+dt) = \int_{\tilde{V}} dV \mu \vec{v} + \int_{V_2} dV \mu \vec{v} \end{cases}$$

52

Maintenant, pr $dt$ suffisamt petit, on peut dire q l'ens des p contenues ds le volume $V_1$ se déplacent à 1 vitesse $\vec{v}_1$, soit donc

$$\int_{V_1} dV \mu \vec{v} = m_1 \vec{v}_1 = \mu(x_1) V_1 \vec{v}_1 \qquad (2)$$

où $m_1$ est la masse de fluide contenue ds le volume $V_1$. On la sect de fluide à la posit $x_1$ vaut $S(x_1)$, et la distance parcourue par cette sect de fluide en un tps $dt$ vaut $|\vec{v}_1| dt$, le volume $V_1$ est de donné par

$$V_1 = S(x_1) |\vec{v}_1| dt \qquad (3)$$

En combinant (2) et (3) on trouve de

$$\int_{V_1} dV \mu \vec{v} = \mu(x_1) S(x_1) |\vec{v}_1| dt \, \vec{v}_1$$

$$= \mu(x_1) S(x_1) v(x_1) |\vec{v}_1| dt \, \vec{u}_x$$

et de, en reconnaissant le débit massiq D déf à la quest 1),

$$\int_{V_1} dV \mu \vec{v} = D |\vec{v}_1| dt \, \vec{u}_x = D \vec{v}_1 dt \qquad (4)$$

De la même manière, on trouve q

$$\int_{V_2} dV \mu \vec{v} = \mu(x_2) V_2 \vec{v}_2 = \mu(x_2) S(x_2) v(x_2) |\vec{v}_2| dt \, \vec{u}_x$$

$$= D \vec{v}_2 dt \qquad (5)$$

En combinant (1) avec (4) et (5) on trouve de 7

$$\vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) = \int_{V_2} dV \rho \vec{v} - \int_{V_1} dV \rho \vec{v}$$

$$= D \vec{v}_2 \, dt - D \vec{v}_1 \, dt = D(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \, dt$$

d'où

$$\frac{\vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t)}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} = D(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Cela montre de 7 la force totale $\vec{f}$ s'exerçant sur la part de fluide comprise entre $x_1$ et $x_2 > x_1$, obtenue (PFD) où la dérivée temporelle de l'impulsion de cette part de fluide, est donnée par

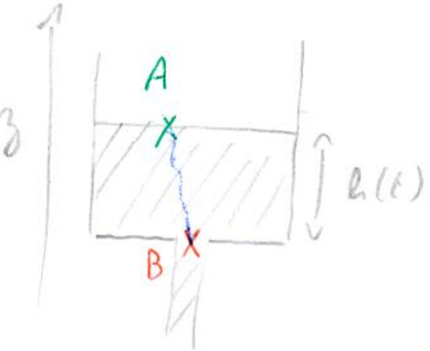
$$\boxed{\vec{f} = \frac{d\vec{P}}{dt} = D(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}$$

qui est la formule d'Euler

Exo 6 : on considère 1 rés cylindriq vertical, de sect° horiz $S$. On supp qu'il contient une hauteur $h$ d'eau. A $t=0$ on perce 1 trou d'aire $s$ ds le fond du cyl, qui va alors se vider petit à petit (6₁)

NB : on gardera l'hyp $s \ll S$ en tête, celle-ci permettant de justifier l'utilisat° du th de Bernoulli : en particulier, cette condit° permet de justifier l'hyp de régime permanent atteint par le fluide

A 1 instant $t \geq 0$, la hauteur d'eau ds le cylindre est $h(t)$. Ecrivons le th de Bernoulli sur 1 ligne de courant joignant 1 pt A à la surface du liquide et 1 pt B situé à l'ouverture percée au fond du réservoir. En tt point de cette ligne on a




$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\mu} = cte$$

où $z$ désigne l'altitude du point considéré. Si on supp par exe q $z=0$ au fond du rés, on aura donc, puisq le pt A est alors à l'altitude $h(t)$,

$$\frac{v_A^2}{2} + gh + \frac{P_A}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\mu}$$

De plus, les press° $P_A$ et $P_B$ aux pts A et B st les = et égales à la press° atm, $P_A = P_B = P_{atm}$, d'où la relat°

$$v_B^2 = v_A^2 + 2gh \qquad (1)$$

Notons maintenant q'au cours d'1 int de tps $dt$, le pt A se déplace d'1 distance $-|v_A|dt$. Or, cette dist est exactement la variat° de la hauteur d'eau $dh$ entre les instants $t$ et $t+dt$, ie

$$dh = -|v_A|\,dt$$

et donc

$$\frac{dh}{dt} = -|v_A|$$

<u>NB</u> : le fait que $dh/dt$ soit négatif indique simplement que la hauteur d'eau baisse au cours du tps, ce qui est logique puisque le rés se vide. On a donc

$$v_A^2 = \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 \tag{2}$$

d'où par (1)

$$v_B^2 = \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + 2gh \tag{3}$$

De +, la conservat° de la masse nous donne égalt la relat° suivante entre $v_A$ et $v_B$ :

$$S v_A = s v_B \tag{4}$$

<u>NB</u> : en effet, $\mu S v_A\,dt$ correspond à la masse d'eau ayant traversé une sect° d'aire $S$ du rés en un tps $dt$, tandis que $\mu s v_B\,dt$ correspond à la masse d'eau ayant traversé l'ouverture d'aire $s$ au fond du rés pdt la m̂ durée $dt$. Ces 2 masses doivent ê =, $\mu S v_A \cancel{dt} = \mu s v_B \cancel{dt}$

De (4) on tire donc

$$v_B^2 = \left(\frac{S}{s}\right)^2 v_A^2$$

d'où avec (2)

$$v_B^2 = \left(\frac{S}{s}\right)^2 \left(\frac{dh}{dt}\right)^2$$

ce qui nous donne donc par (3)

$$\left(\frac{S}{s}\right)^2\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + 2gh$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1\right]\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = 2gh \quad \Leftrightarrow \quad \frac{S^2 - s^2}{s^2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = 2gh$$

soit, en définissant

$$\gamma^2 \equiv \frac{S^2 - s^2}{s^2} \qquad (5)$$

l'éq

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\sqrt{2gh}}{\gamma} \quad (\text{qui est bien} < 0) \qquad (6)$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{\sqrt{2g}}{\gamma}\,dt \quad \Rightarrow \quad \int_{h_0}^{h} \frac{dh'}{\sqrt{h'}} = \left[2\sqrt{h'}\right]_{h_0}^{h} = -\frac{\sqrt{2g}}{\gamma}\,t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{h} = \sqrt{h_0} - \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{g}{2}}\,t = \sqrt{h_0}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{g}{2h_0}}\,t\right)$$

et donc, en prenant le carré, et puisque $h_0 = h(0) = h$,

$$\boxed{h(t) = h\left(1 - \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{g}{2h}}\,t\right)^2} \qquad (7)$$

Soit maintenant le tps $T$ nécessaire à la vidange totale du rés, on doit donc avoir

$$h(T) = 0$$

et donc

$$1 - \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{g}{2h}}\,T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \gamma\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (8)$$

On sait que le débit $D$ est donné par (supp que ds notre syst d'unité la masse volumique de l'eau vaut 1)

$$D = S\, v_A \quad (= s\, v_B)$$

Ce débit dépend du tps, $D = D(t)$. On en sait que (cf (7))

$$v_A = |v_A| = -\frac{dh}{dt}$$

d'où avec (6)

$$v_A = \frac{1}{\gamma}\sqrt{2gh(t)} \tag{9}$$

Le débit initial $D_0$ vaut de

$$D_0 = D(0) = S\, v_A(0) = \frac{S}{\gamma}\sqrt{2gh(0)} = \frac{S}{\gamma}\sqrt{2gh}$$

Supp de que le débit reste constant$^t$ = au débit initial $D_0$. Ce dernier représentant une masse / unité de tps, le tps $T_0$ requis pr vider le réservoir (contenant 1 volume d'eau $Sh$) satisfait donc (on rappelle $\mu = 1$ ds notre cas)

$$D_0 T_0 = V_{eau} = Sh \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{Sh}{D_0}$$

soit avec l'exp de $D_0$

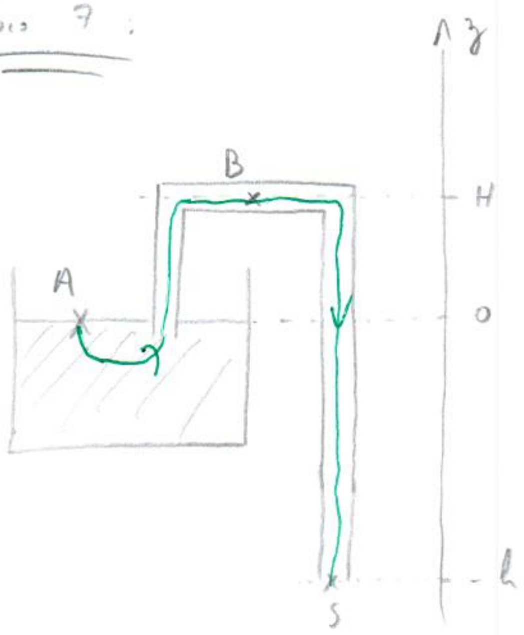
$$T_0 = \cancel{S}h\,\frac{\gamma}{\cancel{S}}\,\frac{1}{\sqrt{2gh}} = \gamma\sqrt{\frac{h}{2g}} \tag{10}$$

En combinant (8) et (10) on voit que $T$ et $T_0$ st reliés via

$$T = \gamma\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\gamma\sqrt{\frac{h}{2g}} = 2T_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2T_0}$$

$\hookrightarrow$ AN : $T = \sqrt{\frac{S^2 - s^2}{s^2}}\sqrt{\frac{2h}{g}} \simeq 2.10^3\ s$

Exo 7 :




Un siphon permet l'écoulement de l'eau d'1 rés de gdes dim

(s gdes dim => le niveau d'eau ds le réservoir reste de près cst constant, et on choisit notre origine sur l'axe z telle q la surface de l'eau ds le rés soit à 1 altitude $z = 0$.

Le siphon est alors formé par 1 tuyau de sect S (de sa ds le siphon) formant 1 coude, s'élevant au-dessus de la surface de l'eau ds le rés d'1 hauteur H (afin le pouvoir sortir du rés) puis pend verticalement. L'orifice de sortie du siphon est situé à 1 hauteur h en dessous de la surface de l'eau ds le rés. On supp q les condit de validité du th de Bernoulli (fluide parfait, incompressible, rég permanent pr l'écoult) st vérifiées ds ce syst.

Considérons de 1 ligne de courant joignant un pt A à la surface de l'eau ds le rés au point S de sortie du siphon et passant par 1 pt B situé ds la partie supérieure du siphon :

(1) $\begin{cases} \text{altitude de A : } z_A = 0 \\ \text{altitude de B : } z_B = H \\ \text{altitude de S : } z_S = -h \end{cases}$

On écrit alors le th de Bernoulli aux pts A, B et S, ce qui ns donne

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + gH + \frac{P_B}{\mu} = \frac{v_S^2}{2} - gh + \frac{P_S}{\mu}$$

On sait q l'on a

$$P_A = P_S = P_{atm} \qquad (2)$$

d'où

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_{atm}}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + gH + \frac{P_B}{\mu} = \frac{v_S^2}{2} - gh + \frac{P_{atm}}{\mu} \qquad (3)$$

De +, par conservat° du débit ds le tuyau on a

$$S v_B = S v_S \Rightarrow v_B = v_S \qquad (4)$$

Déterminons $v_S$ grâce à (3), on a

$$v_S^2 = v_A^2 + 2gh \qquad (5)$$

Or, ds l'hyp d'1 gd rés., on sait q le niveau de l'eau ds le rés ne change pas ⇒ la vitesse d'1 pt de la surface doit de ê nulle, ie

$$v_A = 0 \qquad (6)$$

et dc avec (6)

$$v_S^2 = 2gh \qquad (7)$$

le débit ds le tuyau est donc donné par (constant ds le tuyau, dc on l'écrit par ex au pt S)

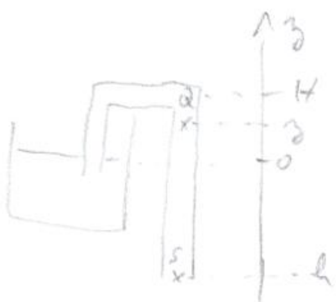
$$D = \mu S v_S = \mu S \sqrt{2gh} \Rightarrow \boxed{D = \mu S \sqrt{2gh}} \qquad (8)$$

On voit dc que baisser le point de sortie du siphon (ie ↗ h) permet de d'↗ le débit.

MAIS : on ne peut ↗ arbitrairement le débit, car atteinte une certaine valeur de h des bulles de gaz peuvent se former ds le tuyau, rendant ainsi la circulation d'eau plus difficile au sein du tuyau (7₂)

Cs c'est pour ça pr cela qu'il est nécessaire de purger régulièrement des radiateurs, afin d'y faciliter la circulat du liquide

Ce phénomène se produit lorsq la press° P en un point du tuyau devient négative. Considérons 1 pt Q qcq du tuyau, situé à 1 altitude $z$, avec $z \in [-h, H]$, et sur 1 ligne de courant joignant le pt S à la sortie. On a d'après le th de Bernoulli




$$\frac{v_Q^2}{2} + gz + \frac{P_Q}{\mu} = \frac{v_S^2}{2} - gh + \frac{P_{atm}}{\mu} \quad (9)$$

La conservat° du débit ds le tuyau (de sect° S) ns assure q

$$v_Q = v_S \quad (10)$$

d'où pr (9)

$$\cancel{\frac{v_Q^2}{2}} + gz + \frac{P_Q}{\mu} = \cancel{\frac{v_S^2}{2}} - gh + \frac{P_{atm}}{\mu}$$

et dc

$$P_Q = P_{atm} - g(h+z)$$

On requiert dc q $P_Q \geq 0$, $\forall Q \in$ tuyau, ie

$$P_{atm} - g(h+z) \geq 0 \quad , \quad \forall z \in [-h, H]$$

et de la condit° pr h :

$$h \leq \frac{P_{atm}}{g} - z \quad , \quad \forall z \in [-h, H] \tag{11}$$

Notons q

$$-h \leq z \leq H \quad \iff \quad h \geq -z \geq -H$$

soit dc

$$\frac{P_{atm}}{g} - H \leq \frac{P_{atm}}{g} - z \leq \frac{P_{atm}}{g} + h \tag{12}$$

En combinant (11) et (12), on voit dc q h doit ê $\leq$ à la valeur minimale de $\frac{P_{atm}}{g} - z$, ie $\frac{P_{atm}}{g} - H$, et on trouve dc la condition

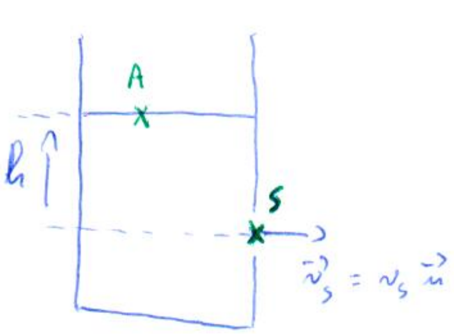
$$\boxed{h \leq \frac{P_{atm}}{g} - H} \tag{13}$$

que doit respecter la hauteur h afin d'éviter la formation de bulles de gaz. En combinant (8) et (13) on voit dc q la valeur max possible pr le débit sera prise pr la val max possible de h, ie

$$\boxed{D_{max} = \mu S \sqrt{2(P_{atm} - gH)}} \tag{14}$$

Exo 8 : soit un récipient de grandes dimensions percé d'un orifice d'aire $s$ par où s'échappe un jet d'eau horizontal, dirigé par un vecteur unitaire $\vec{u}$.

$8_1$




Soient donc un point A à la surface de l'eau (située à une hauteur $h$ par rapport à l'orifice), et un point S à l'orifice. On écrit Bernoulli aux points A et B et on a

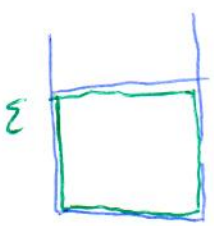
$$\frac{v_A^2}{2} + gh + \frac{P_{atm}}{\mu} = \frac{v_S^2}{2} + \frac{P_{atm}}{\mu} \qquad (1)$$

Dans l'hypothèse d'un récipient de grandes dimensions, la surface de l'eau est immobile d'où $v_A = 0$. On voit donc directement de (1) que

$$v_S = \sqrt{2gh}$$

d'où la vitesse d'éjection

$$\vec{v}_S = \sqrt{2gh}\,\vec{u} \qquad (2)$$




La force $\vec{F}$ qui s'exerce sur le fluide dans la surface $\Sigma$ s'obtient ensuite de la formule d'Euler, et on a

$$\vec{F} = D\,(\vec{v}_S - \vec{v}_A)$$

où $D = \mu s v_S$ est le débit massique, $\vec{v}_S$ est donnée par (2) et $\vec{v}_A = \vec{0}$. On a donc

$$\vec{F} = 2\mu s g h\,\vec{u} \qquad (3)$$

Or, la force qui s'exerce sur le récipient est simplement $-\vec{F}$. Ainsi, $\vec{F}$ correspond à la force devant être exercée sur le récipient afin de le maintenir immobile.

Exo 9 : On assimile une tornade à un écoulement permanent et incompressible, l'air étant considéré comme un fluide parfait ($\mu = 1.3\ kg/m^3$). Cet écoulement est caractérisé par un vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$ supposé uniforme à l'intérieur d'un cylindre (l'oeil de la tornade) d'axe $Oz$ et de rayon $a = 50\ m$, et nul à l'extérieur. A la périphérie de l'oeil (donc à une distance $a$ de l'axe), la vitesse a pour module $u = 180\ km/h$. $9_1$

L'air étant supposé incompressible, on a

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \qquad (1)$$

De plus, on doit avoir

$$\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{v} = \begin{cases} 2\Omega \vec{u}_z & , \ \rho < a \\ \vec{0} & , \ \rho > a \end{cases} \qquad (2)$$

où $\rho$ est la distance par rapport à l'axe $Oz$ (on utilise un système de coordonnées cylindriques).

On a alors une analogie parfaite avec le problème d'électromagnétisme où l'on veut déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ créé par un cylindre infini de rayon $a$ dans lequel circule un courant électrique.

$\Rightarrow$ on applique donc des méthodes classiques d'électromagnétisme afin de calculer le champ des vitesses $\vec{v}$ dans ce problème.

On sait dès lors que $\vec{v}$ sera $\perp$ aux plans de symétrie, et

i) puisque tout plan contenant l'axe $Oz$ est plan de symétrie (et donc $\vec{u}_\rho, \vec{u}_z \in$ plan de symétrie) alors $\vec{v}$ sera dirigé selon $\vec{u}_\theta$

ii) puisque l'on a invariance par rotation autour de $\vec{u}_z$ et par translation selon $Oz$, alors $\vec{v}$ ne dépendra que de $\rho$

Ainsi, on voit que le champ des vitesses satisfait

$$\vec{v} = v(\rho)\,\vec{n}_\theta \tag{3}$$

1) Soit donc $C_{\mathcal{C}}$ la circulation de $\vec{v}$ sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et rayon $\rho$, on a

$$C_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{l}\cdot\vec{v} = \int_0^{2\pi} d\theta\,\rho\,v(\rho) = 2\pi\,\rho\,v(\rho) \tag{4}$$

Or par le théorème de Stokes on a

$$C_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{l}\cdot\vec{v} = \iint_{\mathcal{D}} dS\ \vec{rot}\,\vec{v}\cdot\vec{n}$$

avec $\mathcal{D}$ le disque de rayon $\rho$, $\vec{n} = \vec{n}_3$ ($\perp$ au disque)
et $\vec{rot}\,\vec{v} = 2\Omega\,\vec{n}_3$ pour $\rho < a$, d'où

$$C_{\mathcal{C}} = 2\Omega\,\pi\,\rho^2 \quad , \quad \rho < a \tag{5}$$

En combinant (4) et (5) on obtient

$$v(\rho) = \Omega\,\rho \quad , \quad \rho < a \tag{6}$$

Si maintenant $\rho > a$, alors on a, puisque $\vec{rot}\,\vec{u} = \vec{0}$ pour $\rho > a$,

$$C_{\mathcal{C}} = \iint_{\mathcal{D}_a} dS\ 2\Omega\,\vec{n}_3\cdot\vec{n}_3$$

avec $\mathcal{D}_a$ le disque de rayon $a$, ie

$$C_{\mathcal{C}} = 2\Omega\,\pi\,a^2 \quad , \quad \rho > a \tag{7}$$

On tire donc de (4) et (7)

$$v(\rho) = \frac{\Omega a^2}{\rho} \quad , \quad \rho > a \tag{8}$$

En combinant (3), (6) et (8) on voit donc que

9₂

$$\vec{v} = \begin{cases} \Omega \rho \, \vec{u}_\theta & , \rho < a \\ \dfrac{\Omega a^2}{\rho} \, \vec{u}_\theta & , \rho > a \end{cases} \tag{9}$$

On voit donc bien que pour $\rho > a$ la tornade est équivalente à un vortex d'intensité

$$C = \Omega a^2 \tag{10}$$

NB : on voit sur (9) que $\vec{v}$ est continu en $\rho = a$

2) On connaît la vitesse $u$ à la périphérie de l'oeil, ie

$$v(a) = u \tag{11}$$

On doit donc avoir d'après (9)

$$\Omega a = u$$

d'où

$$\boxed{\Omega = \frac{u}{a}} \tag{12}$$

3) Calculons tout d'abord la pression $P(\rho)$ pour $\rho > a$. Dans cette région le fluide est irrotationel, on peut donc appliquer Bernoulli et on a (on se place à une altitude constante)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} = \text{constante} \tag{13}$$

On écrit donc (13) à une distance $\rho$ de l'axe et à l'infini (où, d'après (9), on a $v_\infty = \lim_{\rho \to \infty} v(\rho) = 0$)

et on a

$$\frac{v(\rho)^2}{2} + \frac{P(\rho)}{\mu} = \frac{P_0}{\mu}$$

d'où

$$P(\rho) = P_0 - \frac{\mu}{2} v(\rho)^2$$

et donc avec (9) et (12)

$$\boxed{P(\rho) = P_0 - \frac{\mu}{2} u^2 \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 \quad , \quad \rho > a} \tag{14}$$

Cherchons maintenant la pression à l'intérieur de la tornade, ie pour $\rho < a$. Puisque le fluide n'y est pas irrotationnel, on doit cette fois utiliser l'équation d'Euler

$$\frac{1}{2} \vec{\text{grad}} \left(\vec{v}(\rho)^2\right) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}(\rho) = -\frac{1}{\mu} \vec{\text{grad}}\, P \tag{15}$$

En substituant l'expression (9) de $\vec{v}(\rho)$, pour $\rho < a$, dans (15) on trouve alors la pression

$$\boxed{P(\rho) = P_0 + \frac{\mu}{2} u^2 \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \quad , \quad \rho < a} \tag{16}$$

La dépression maximale dans la tornade vaut donc

$$\Delta P = P_0 - P(a)$$

soit avec (16)

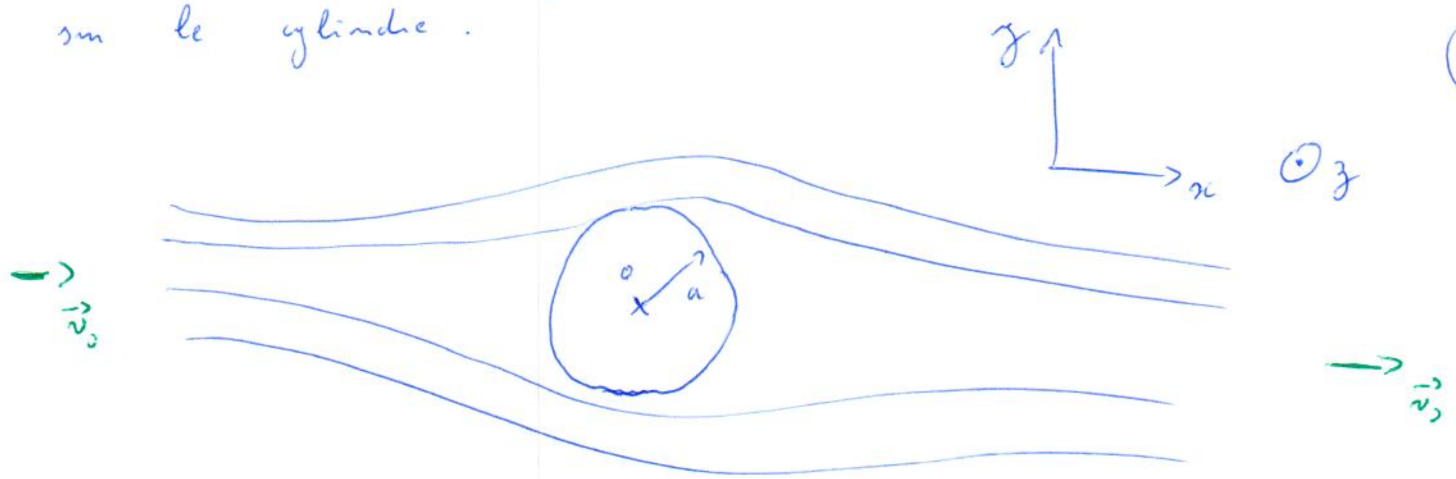
$$\Delta P = -\frac{1}{2} \mu u^2$$

AN : $|\Delta P| = 1625 \text{ Pa} = 1625 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

donc le toit semble en danger

Exo 10 : un vent de vitesse uniforme à l'infini, $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ avec $v_0 > 0$, souffle horizontalement sur un cylindre vertical de rayon $a$. On suppose que le fluide (l'air) est parfait, incompressible ($\Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$) et irrotationnel. On utilisera un système de coordonnées cylindriques centré sur le cylindre.

(10,1)




1) a) On sait déjà que le champ des vitesses $\vec{v}$ satisfait

(1) $$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \qquad \text{(incompressible)}$$

et

(2) $$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} = \vec{0} \qquad \text{(irrotationnel)}$$

Par (2) on voit donc qu'il existe un potentiel scalaire $\phi$ tel que

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\, \phi \qquad (3)$$

(puisque $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}) = \vec{0}$). De plus en combinant (1) et (3) on voit que $\phi$ satisfait

$$\Delta \phi = 0 \qquad (4)$$

avec $\Delta$ le laplacien. Afin de déterminer une solution $\vec{v}$ unique à (1) et (2) on doit donc imposer des conditions aux bords (CL), à savoir :

i) à l'infini, ie pour $\rho \to \infty$ ($\rho$ étant la distance par rapport à l'axe du cylindre), on a

$$\vec{v} = \vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x \quad , \text{ à l'infini} \qquad (5)$$

ii) à la surface du cylindre, ie pour $\rho = a$, on requiert que la composante $\vec{v}_\perp$ de la vitesse perpendiculaire à la surface du cylindre (ie la composante de $\vec{v}$ selon $\vec{u}_\rho$) soit nulle,

$$\vec{v}_\perp = \vec{0} \quad , \text{ pour } \rho = a \qquad (6)$$

ce qui traduit le fait que le fluide ne peut pas pénétrer dans le cylindre.

$\Rightarrow$ les équations (1)-(2) complétées par les CL (5) et (6) déterminent donc $\vec{v}$ de manière unique

De plus, le fluide étant irrotationnel on a par Bernoulli (en se plaçant à une altitude constante)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} = \text{constante}$$

d'où, en appelant $P_0$ la pression (que l'on pourra prendre comme la pression atmosphérique)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{P_0}{\mu} \qquad (7)$$

ce qui détermine complètement la pression si la vitesse $v$ est connue.

b) On rappelle (coordonnées cylindriques)

$$\vec{\text{grad}}\, \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \qquad (8)$$

(on rappelle qu'on travaille à $z$ constant). En prenant $\phi$ de la forme

$$\phi(\rho, \theta) = \left( \frac{A}{\rho} + B\rho \right) \cos\theta \qquad (9)$$

on obtient pour $\vec{v}$, puisque $\vec{v} = \vec{\text{grad}}\, \phi$,

$$\vec{v} = \left( B - \frac{A}{\rho^2} \right) \cos\theta \, \vec{u}_\rho - \left( B + \frac{A}{\rho^2} \right) \sin\theta \, \vec{u}_\theta \qquad (10)$$

que l'on pourra également écrire dans les coordonnées cartésiennes, avec (10₂)

$$\vec{v} = B \, \vec{u}_x - \frac{A}{\rho^2} \left( \cos 2\theta \, \vec{u}_x + \sin 2\theta \, \vec{u}_y \right) \qquad (11)$$

On utilise maintenant les CL (5)-(6) afin de déterminer les coefficients A et B dans (10) (ou, alternativement, (11)). De (5) on tire directement

$$B = v_0 \qquad (12a)$$

puis on obtient avec (6)

$$A = a^2 v_0 \qquad (12b)$$

En combinant (11) avec (12a)-(12b) on trouve donc

$$\boxed{\vec{v} = v_0 \left( 1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \cos\theta \, \vec{u}_\rho - v_0 \left( 1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) \sin\theta \, \vec{u}_\theta} \qquad (13)$$

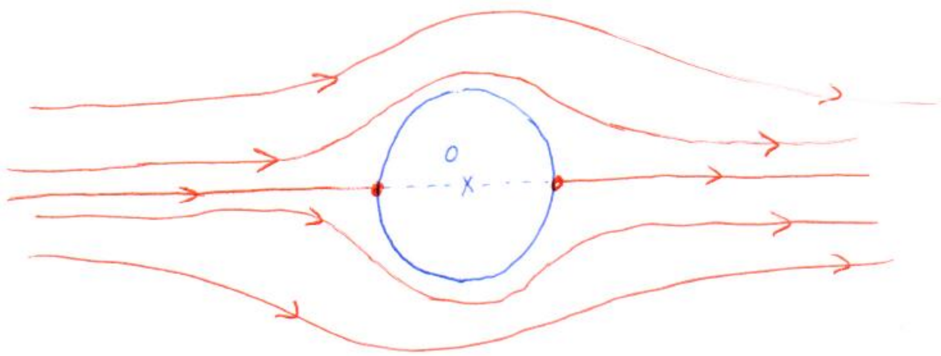
La pression P s'obtient ensuite avec (7), ie

$$P = P_0 + \frac{\mu}{2} \left( v_0^2 - v^2 \right)$$

et donc avec (13) (en se rappelant que $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$)

$$\boxed{P = P_0 + \frac{\mu}{2} v_0^2 \frac{a^2}{\rho^2} \left( 2 \cos 2\theta - \frac{a^2}{\rho^2} \right)} \qquad (14)$$

c) Notons que, pour $\rho = a$, on a $\vec{v} = \vec{0}$ lorsque $\theta = 0, \pi$. Il n'y a pas d'autres solutions à $\vec{v} = \vec{0}$ dans le cas présent. On a donc pour les lignes de champ




d) La force par unité de longueur $\vec{F}$ s'exerçant sur le cylindre est donc donnée par

$$\vec{F} = -\int_0^{2\pi} d\theta \; a \; P(a,\theta) \, \vec{n}_\rho(\theta) \qquad (15)$$

où $P(a,\theta)$ est donnée par (14) pour $\rho = a$ et $\vec{n}_\rho(\theta) = \cos\theta \, \vec{n}_x + \sin\theta \, \vec{n}_y$. On trouve alors

$$\vec{F} = \vec{0} \qquad (16)$$

qui est le paradoxe de d'Alembert : le résultat (16) indique que l'air n'exerce aucune force sur le cylindre, ce qui est contraire à l'observation.

⇒ c'est l'hypothèse d'un fluide irrotationnel qui est en cause : la présence du cylindre entraînera la formation de tourbillon, et on doit donc avoir $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v} \neq \vec{0}$ !

2) Le cylindre tourne maintenant autour de son axe à une vitesse angulaire $\omega$. On ajoute alors un vortex

$$\vec{v}\,' = \frac{\omega a^2}{\rho} \vec{n}_\theta \qquad (17)$$

au champ de vitesse (10) obtenu précédemment. Le champ des vitesses $\vec{v}$ dans ce cas s'écrit donc sous la forme

$$\vec{v} = \vec{v}^{\,(\omega=0)} + \vec{v}\,' \qquad (18)$$

avec $\vec{v}^{(\omega=0)}$ donné par (10). D'après la question 1), $\vec{v}^{(\omega=0)}$ satisfait (1), (2), (5) et (6). De plus, $\vec{v}'$ correspond à la vitesse trouvée à l'exo 9 et on sait donc qu'elle satisfait (puisque $\rho > a$) 10₃

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v}' = 0 \\ \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{v}' = \vec{0} \end{cases}$$

De plus, $\vec{v}'$ satisfait les CL

$$\lim_{\rho \to \infty} \vec{v}' = \vec{0}$$

et

$$\vec{v}'_{\perp} = \vec{0} \quad , \quad \rho = a$$

puisque $\vec{v}'$ n'a pas de composante selon $\vec{u}_\rho$. Le champ des vitesses (18) satisfait donc bien les équations et les CL voulues.

b) Cherchons les points de vitesse nulle. On supposera que l'on a $\omega > 0$.

→ Cas 1 : étudions le cas $\vec{v} = \vec{0}$ sur le cylindre, ie pour $\rho = a$. Cela est équivalent, d'après (18), à

$$\sin \theta = \alpha \tag{19}$$

avec

$$\alpha \equiv \frac{\omega a}{2 v_0} \tag{20}$$

(19) ne peut être satisfaite que si $\alpha < 1$, auquel cas on a les deux angles possibles

(21) $$\theta = \operatorname{Arcsin} \alpha \quad \text{et} \quad \theta = \pi - \operatorname{Arcsin} \alpha$$

Si $\alpha > 1$, alors $\vec{v} = \vec{0}$ n'admet aucune solution pour $\rho = a$.

→ Cas 2 : étudions maintenant le cas $\vec{v} = \vec{0}$ en dehors du cylindre, ie pour $\rho > a$. Dans ce cas, à la fois la composante de (18) selon $\vec{u}_\rho$ et la composante selon $\vec{u}_\theta$ doivent s'annuler, et on a

$$(22) \begin{cases} v_0 \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right) \cos\theta = 0 & (22a) \\ \frac{\omega a^2}{\rho} - v_0 \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2}\right) \sin\theta = 0 & (22b) \end{cases}$$

De (22a) on tire

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2} \tag{23}$$

et donc de (22b) on obtient

$$(24) \quad \frac{\omega a^2}{\rho} \mp v_0 \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2}\right) = 0 \quad , \quad \text{pour } \theta = \pm \pi/2$$

Puisque $\omega, v_0 > 0$, l'équation (24) pour $\oplus$ (correspondant à $\theta = -\pi/2$) n'admet aucune solution réelle. On doit donc avoir

$$\theta = + \frac{\pi}{2} \tag{25}$$

et $\rho$ satisfaisant donc (24) pour $\ominus$, ie

$$\rho^2 - 2\alpha a \rho + a^2 = 0 \tag{26}$$

où l'on a introduit la quantité $\alpha$ définie par (20).
(26) admet donc les deux solutions

$$\rho_\pm = a\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}\right) \tag{27}$$

lorsque $\alpha > 1$ (si $\alpha < 1$, alors (26) n'a pas de solution réelle ). Notons que la fonction $\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} = f(\alpha)$ est décroissante, et puisque $f(1) = 1$ on voit donc que $\alpha - \sqrt{\alpha^2-1} < 1$, $\forall \alpha > 1$. Ainsi $\rho_- < a$, $\forall \alpha > 1$, et n'est donc pas une solution acceptable ( car située à l'intérieur du cylindre ).

(10₄)

=) en dehors du cylindre, ie pour $\rho > a$, on trouve donc une solution unique à l'équation $\vec{v} = \vec{0}$, à savoir

$$(28) \quad \begin{cases} \rho = \rho_+ = a\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right) \\ \theta = +\dfrac{\pi}{2} \end{cases}, \quad \alpha > 1$$

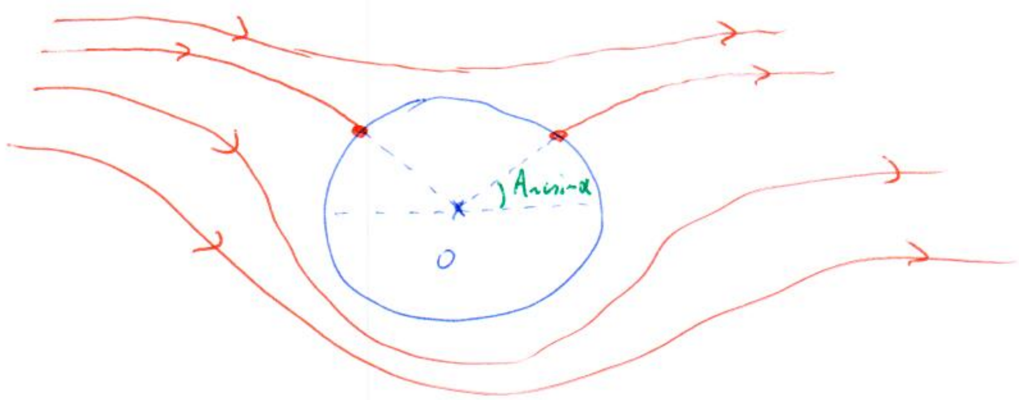
On a donc trois régimes :

i) $\alpha < 1$, ie $v_0 > \dfrac{\omega a}{2}$ ( vent fort )

ii) $\alpha = 1$, ie $v_0 = \dfrac{\omega a}{2}$ ( cas limite )

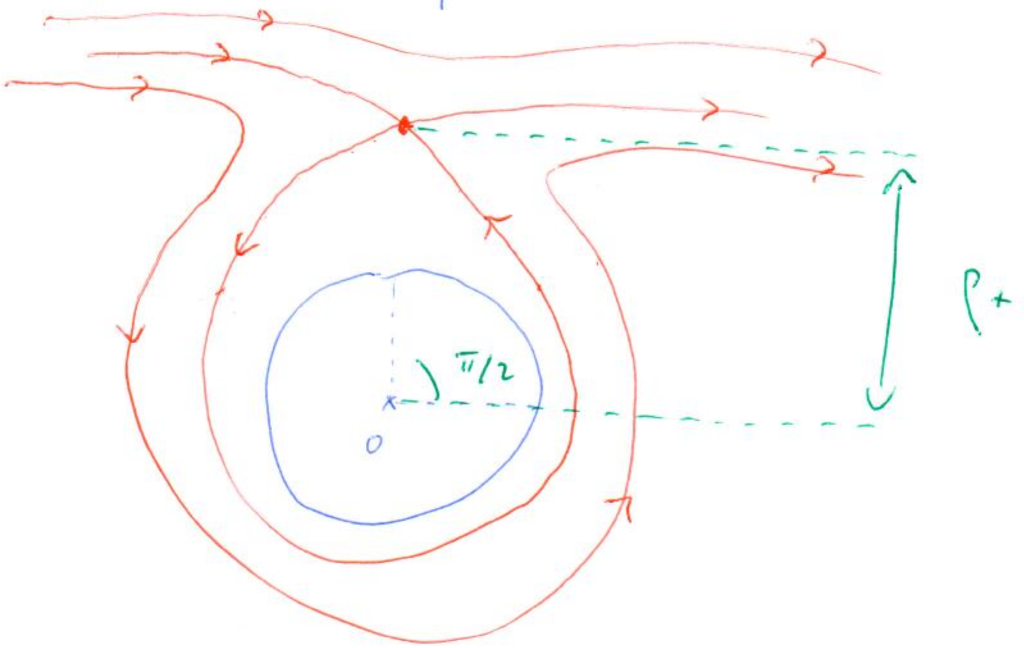
iii) $\alpha > 1$, ie $v_0 < \dfrac{\omega a}{2}$ ( vent faible )

-> <u>Lignes de champ pour $\alpha < 1$</u> : on a dans ce cas $\vec{v} = \vec{0}$ aux deux angles (21), d'où




Cas $\alpha < 1$

→ <u>Lignes de champ pour $\alpha > 1$</u> : dans ce cas $\vec{v} = \vec{0}$ uniquement au point (28), d'où




c) La pression s'obtient ici encore avec (7), ie ici, avec $\vec{v}$ donnée par (18) ici,

$$P = P_0 + \frac{\mu}{2} \left[ v_0^2 \frac{a^2}{\rho^2} \left( 2 \cos 2\theta - \frac{a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\omega^2 a^4}{\rho^2} \right. \tag{29}$$

$$\left. + 2 \frac{\omega a^2}{\rho} v_0 \left( 1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) \sin \theta \right]$$

On a donc la force par unité de longueur

$$\vec{F} = - \int_0^{2\pi} d\theta \, a \, P(a, \theta) \, \vec{n}_\rho(\theta)$$

et on trouve

$$\vec{F} = - 2\pi \mu \, v_0 \, \omega \, a^2 \, \vec{n}_y \tag{30}$$

Dans le cas du lift, $\omega > 0$, la balle monterait puis serait plaquée au sol ; pour un slice, $\omega < 0$, la balle flotterait.